جامعة البعث

تحليل عقدي /2/ اسم الطالب :

القسم الرياضيات – كلية العلوم الفصل الأول2017-2018

السؤال الأول : (20+10 =30درجة)

1"- أوجد نشر لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{z-2}{z^2-3z}$ في النطاق $3 \prec |z|$.

ثمّ من النشر الناتج حدد نوع نقطة اللانهاية وقيمة الراسب عندها .

2"- عين النقاط من $|z| \le 1$ التي تبلغ عندها الدالة $f(z)=z^3+iz$ قيمتهاالعظمى .

السؤال الثاني : (30درجة)

أوجد وصنّف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية

$$f_1(z)=\frac{2z-3\pi}{(2z-\pi)\cos z} \;\&\; f_2(z)=\frac{1}{7-\sin z} \;\&\; f_3(z)=\frac{1}{z^2\sin 2z}e^{\frac{1}{z-1}}$$

السؤال الثالث : (20درجة)

أعتمادا على نظرية الرواسب أوجد قيمة

$$I_2=\int_{|z|=2}\frac{e^{\cos z}}{z^3-3z}dz \;\&\; I_1=\int_{|z|=2}\frac{2z}{(z^5-1)(z-3)}dz$$

السؤال الرابع : (20درجة)

1"- احسب قيمة التكامل $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-\cos\theta}$

مدرس المقرر: د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول

$30 = 10 + 20$

أولاً: (20)

$$f(z) = \frac{z-2}{z^2}\,\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2}\right)\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \frac{27}{z^3} + \dots\right) \quad 3<|z|$$

(2) (1) (3)

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^3} + \frac{27}{z^3} + \frac{81}{z^4} + \dots \quad (2)$$

$$- \frac{2}{z^2} - \frac{6}{z^3} - \frac{18}{z^4} - \frac{54}{z^5} \quad (2)$$

ومنه يأتي

2 $$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{9}{z^4} + \frac{27}{z^5} + \frac{81}{z^6} + \dots \quad 3<|z|$$

1 { ة- من أشكال بعد نستنتج أن نقطة اللانهاية هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح إذا عرفنا $f(\infty)=0$ تصبح صفر من الدرجة الأولى ونقطة الراسب عند اللانهاية تكون بالعلاقة

4 { $\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}\, f(z) = -b_1 = -1$

ملاحظة هناك طريقة ثانية لإيجاد الراسب تعتمد القوانين

ثانياً: الدالة $f(z) = z^3 + iz$ دالة تحليلية وشاملة (15)

2 { لذلك هي مستمرة على الدائرة $|z|=1$ وتحليلية ضمن هذه الدائرة نحسب بدايةً القيمة العظمى لهذه الدالة تبلغ قيمتها العظمى على محيط الدائرة نفرض أنه $0 \le \theta \le 2\pi$ ، $z = e^{i\theta}$ عندئذٍ

2 { $$|f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f(z)} = \left(e^{3i\theta} + i e^{i\theta}\right)\left(e^{-3i\theta} - i e^{-i\theta}\right)$$

$$= 1 - i e^{2i\theta} + i e^{-2i\theta} + 1 = 2 - i\left(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}\right)$$

$$= 2 + 2\,\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i} = 2 + 2\sin 2\theta$$

لكن $-1 \le \sin 2\theta \le 1 \Leftarrow 0 \le 2 + 2\sin 2\theta \le 4$

1 { أي أن القيمة العظمى للدالة $|f(z)|^2$ هي 4 ومنه نجد

1 { $2+2\sin 2\theta=4 \Rightarrow \sin 2\theta=1 \Rightarrow 2\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi$

إذن $\theta=\frac{\pi}{4}+n\pi$ عندما $n=0$ نجد أنه $\theta=\frac{\pi}{4}$ ومنه

2 $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt2}+i\frac{1}{\sqrt2}$

2 $z_2=e^{i\frac{5\pi}{4}}=-\frac{1}{\sqrt2}-i\frac{1}{\sqrt2}$ عندما $n=1$ نجد أنه $\theta=\frac{5\pi}{4}$ ومنه

وهي النقاط التي تحقق معادلة المنحني المغلق.

جواب السؤال الثاني (30 درجة)

• النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ هي جذور المعادلة $(2z-\pi)\cos z=0$ 1 (15)

أي أن إما $2z-\pi=0 \Rightarrow z=\frac{\pi}{2}$ 1

أو $\cos z=0 \Rightarrow z=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ 1

2 { عندما $n=0$ نجد أن $z=\frac{\pi}{2}$ وهي صفر للمقام من الدرجة الثانية
وبالتالي هي قطب من الرتبة الثانية للدالة $f_1(z)$

2 { عندما $n=1$ نجد أن $z=\frac{3\pi}{2}$ وهذه النقطة تعدم المقام وتعدم البسط أيضاً لذلك هي نقطة شاذة قابلة للإزالة (صفر للبسط من الدرجة الأولى وصفر للمقام من الدرجة الأولى)

3 { باقي النقاط $z=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n=-1,\pm2,\pm3\ldots$
أصفار بسيطة للمقام فهي أقطاب بسيطة للدالة $f_1(z)$

• النقاط الشاذة هي جذور المعادلة $\sin z=7 \Rightarrow z=\arcsin 7$ (15)

10 { $z=-i\log(i7+\sqrt{1-49})=-i\log(i7\pm i4\sqrt3)$

$=-i\left[\text{Log}\,|7\pm4\sqrt3|+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]=\frac{\pi}{2}+2n\pi-i\,\text{Log}(7\pm4\sqrt3)$

وجميعها أصفار من الدرجة الأولى للمقام فهي أقطاب بسيطة للدالة $f_2(z)$

• النقاط الشاذة هي جذور المعادلتين $z-1=0 \Rightarrow z=1$ (15)

2 { $z^2\sin 2z=0 \Rightarrow z=0$ أو $2z=n\pi$, $n=0,\pm1,\pm2\ldots$

2 { عندما $z=1$ هي قطب بسيط للدالة $\frac{1}{z-1}$ وبالتالي هي نقطة شاذة أساسية للدالة $f_3(z)$

عندما $n=0$ نجد $z=0$ صفر من الدرجة الثالثة للمقام وبالتالي قطب من الرتبة الثالثة لـ f_3

4 { باقي النقاط أصفار بسيطة فهي أقطاب بسيطة للدالة $f_3(z)$

جواب السؤال الثالث $\boxed{20 = 10 + 10}$

1 $$I_1 = 2\pi i \sum_{j=1}^{5} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{2z}{(z^5-1)(z-3)}$$

لكن

1 $$\sum_{j=1}^{5} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{2z}{(z^5-1)(z-3)} + \operatorname{Res}_{z=3} \frac{2z}{(z^5-1)(z-3)} + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

لأن ∞ نقطة عادية في جوار ∞ للدالة $\frac{2z}{(z^5-1)(z-3)}$ لذلك فإن

2 $$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{2z}{(z^5-1)(z-3)} = 0$$

اما $z=3$ نقطة قطب بسيط عندئذ

2 $$\operatorname{Res}_{z=3} f(z) = \lim_{z\to 3} (z-3)\frac{2z}{(z^5-1)(z-3)} = \lim_{z\to 3} \frac{2z}{z^5-1} = \frac{6}{242}$$

اذن فإن

2 $$\sum_{j=1}^{5} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{2z}{(z^5-1)(z-3)} = -\frac{6}{242}$$

اذن

2 $$I_1 = 2\pi i\left(-\frac{6}{242}\right) = -\frac{6\pi i}{121}$$

• لحساب I_2 النقاط الشاذة هي جذور المعادلة $z^3-3z=0$ أي $z_1=0$ و $z_2=\sqrt{3}$, $z_3=-\sqrt{3}$ 1

وجميعها أقطاب بسيطة للدالة هي أقطاب بسيطة.

1 $$I_2 = 2\pi i\,(b_1+b_2+b_3)$$

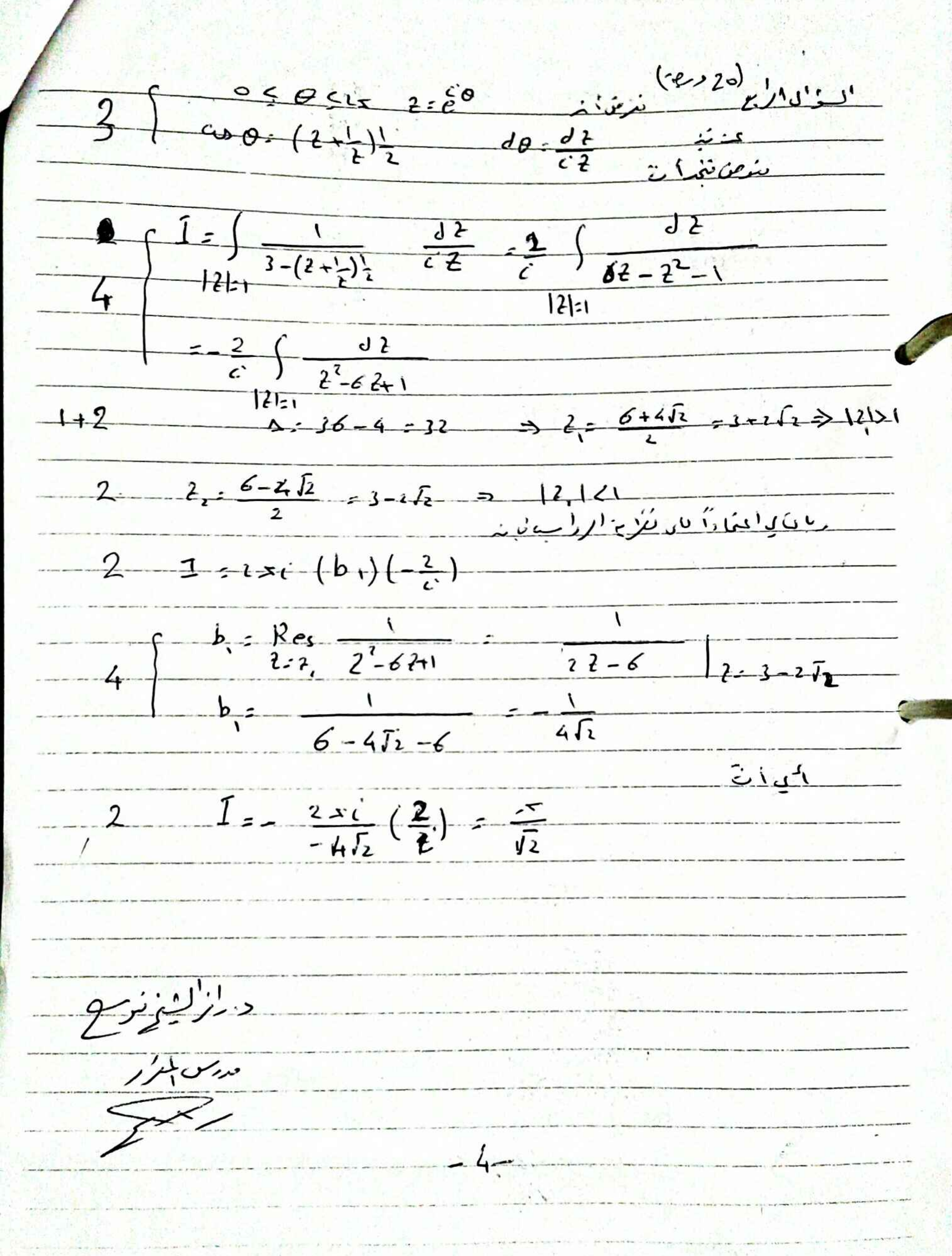
2 $$b_1 = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{\cos z}}{z^3-3z} = \left.\frac{e^{\cos z}}{3z^2-3}\right|_{z=0} = \frac{e}{-3}$$

2 $$b_2 = \operatorname{Res}_{z=\sqrt{3}} \frac{e^{\cos z}}{z^3-3z} = \frac{e^{\cos\sqrt{3}}}{6}$$

2 $$b_3 = \operatorname{Res}_{z=-\sqrt{3}} \frac{e^{\cos z}}{z^3-3z} = \frac{e^{\cos(-\sqrt{3})}}{6} = \frac{e^{\cos\sqrt{3}}}{6}$$

ومنه فإن

2 $$I_2 = 2\pi i\left(-\frac{e}{3} + \frac{e^{\cos\sqrt{3}}}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi i\left(e^{\cos\sqrt{3}} - e\right)$$



السؤال الرابع (20 درجة)

نفرض: $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$

3 عندئذ: $\cos\theta = \left(z + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{2}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$

يصبح التكامل

4
$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{3 - \left(z + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{6z - z^2 - 1}$$
$$= -\frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 6z + 1}$$

1+2 $\Delta = 36 - 4 = 32 \Rightarrow z_1 = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow |z_1| > 1$

2 $z_2 = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow |z_2| < 1$

وبالتالي اعتمادا على نظرية الرواسب نجد

2 $I = 2\pi i \,(b_1)\left(-\frac{2}{i}\right)$

4
$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_2} \frac{1}{z^2 - 6z + 1} = \frac{1}{2z - 6}\Big|_{z = 3 - 2\sqrt{2}}$$
$$b_1 = \frac{1}{6 - 4\sqrt{2} - 6} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

الجواب

2 $I = -\frac{2\pi i}{-4\sqrt{2}}\left(\frac{2}{i}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

د. [signature]

مدرس المقرر

[signature]